

**CAPITOLO 8**

# Correnti aerodinamiche: ali di apertura finita

**Introduzione** Nel capitolo precedente abbiamo sviluppato la teoria dei profili alari considerando l'ala come un cilindro di lunghezza infinita, con sezione normale all'asse avente la forma di profilo alare, investito da una corrente esterna uniforme diretta perpendicolarmente al suo asse. La geometria del problema e le condizioni al contorno hanno permesso di considerare la corrente bidimensionale. In realtà la superficie portante di qualunque velivolo è di lunghezza finita e quindi la corrente attorno a essa è necessariamente tridimensionale. Di conseguenza dobbiamo analizzare se e in quale modo la teoria dei profili sottili sviluppata nel capitolo precedente può essere estesa per tenere conto di questo aspetto.

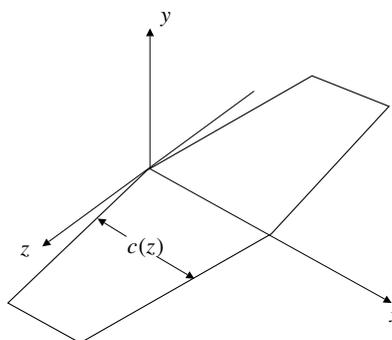
L'analisi che presentiamo si basa sulla trattazione dei paragrafi iniziali del capitolo 5 di due testi classici: John D. Anderson *Fundamentals of Aerodynamics*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 2001 e John N. Newman *Marine Hydrodynamics*, Fourth Printing, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1982.

Per una visione rigorosa e moderna della teoria della linea portante si rimanda all'articolo di Jean-Luc Guermond "A generalized lifting-line theory for curved and swept wings", *Journal of Fluid Mechanics*, **211**, p. 497–513, 1990. La versione instazionaria della teoria è trattata nel lavoro di Jean-Luc Guermond e Antoine Sellier "A unified unsteady lifting-line theory", *Journal of Fluid Mechanics*, **229**, p. 427–451, 1991.

## 8.1 Descrizione delle ali di apertura finita

La descrizione geometrica di un'ala di apertura finita non è immediata in quanto è necessario specificare in modo completo le sue due superfici, superiore e inferiore, che hanno in generale una forma complicata. A tale scopo si introduce un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  orientato lungo la corda del profilo corrispondente alla sezione dell'ala con il piano mediano, l'asse  $y$  diretto verso l'alto perpendicolarmente al piano dell'ala e l'asse  $z$  orizzontale in modo da formare una terna destra. L'origine del sistema è nel bordo d'attacco del profilo al centro dell'ala, sul piano mediano, come mostrato nella figura 8.1.





**Figura 8.1** Sistema di riferimento e pianta di un'ala di apertura finita

Ai fini della nostra teoria, la forma dell'ala può essere caratterizzata indicando tre sole funzioni della coordinata  $z$  che percorre l'ala nel senso della sua apertura.

Supponiamo di indicare con  $b$  l'**apertura** dell'ala, per cui avremo  $-\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2}$ . Allora, la **pianta** dell'ala sarà data dalla funzione, solitamente simmetrica<sup>1</sup>,

$$c = c(z), \quad |z| \leq b/2,$$

che specifica la lunghezza  $c(z)$  della corda del profilo in ogni sezione  $z$  dell'ala.

L'area della **superficie dell'ala** è allora data dall'integrale seguente

$$S = \int_{-b/2}^{b/2} c(z) dz.$$

Si introduce poi il **rapporto di forma** o **allungamento** di un'ala tramite il rapporto

$$R_f = \frac{b^2}{S},$$

dove  $b$  è l'apertura dell'ala e  $S$  è l'area della sua superficie. In particolare, per un'ala con pianta rettangolare  $c(z) = c = \text{costante}$ , per cui  $S = bc$  e  $R_f = b/c$ .

<sup>1</sup> Esistono nella storia dell'aeronautica alcuni esempi di velivoli con ala, per ragioni diverse, asimmetrica. Un esempio piuttosto singolare di asimmetria è l'aereo della seconda guerra mondiale Blohm und Voss BV-141. Un esempio in cui l'asimmetria è stata utilizzata per contrastare il momento di rollio generato dalle eliche sono i Macchi Castoldi MC-200, MC-202 e MC-205.





Il rapporto di forma è una misura importante degli effetti tridimensionali. Per elevati allungamenti i profili alari, lontano dalle estremità dell'ala, lavorano sostanzialmente come nel caso bidimensionale. Per bassi allungamenti, invece, il comportamento dell'ala è dominato da fenomeni tridimensionali e non può essere trattato con la teoria semplificata sviluppata in questo capitolo.

Le ali possono poi avere uno **svergolamento geometrico** consistente in una variazione dell'angolo d'incidenza  $\alpha(z)$  della corda del profilo nelle varie sezioni  $z$  dell'ala: questa caratteristica geometrica è descritta dalla funzione

$$\alpha = \alpha(z), \quad |z| \leq b/2,$$

che fornisce l'**angolo di svergolamento** della corda del profilo di ogni sezione in funzione della sua distanza  $z$  dal piano mediano dell'ala. Questa funzione è quasi sempre simmetrica (un'eccezione è, ad esempio, il *boomerang*). Per un'**ala piatta** si avrà  $\alpha(z) = 0$ .

Infine, le ali di molti aeroplani moderni hanno sezioni con profili alari diversi lungo l'apertura e questo provoca valori diversi di  $\alpha_{\ell=0}$  nelle diverse sezioni dell'ala<sup>2</sup>. Questo aspetto è indicato con il nome di **svergolamento aerodinamico** dell'ala ed è rappresentato da una terza funzione, sempre simmetrica,

$$\alpha_{\ell=0} = \alpha_{\ell=0}(z), \quad |z| \leq b/2.$$

Strettamente parlando, questa terza funzione non costituisce un'informazione di natura geometrica bensì è una conseguenza diretta che può essere calcolata a partire dalla forma del profilo relativo a ciascuna sezione  $z$  dell'ala.

L'utilità di queste tre funzioni nell'ambito della teoria che qui ci interessa sta nel fatto che esse sono sufficienti per ricavare una nuova equazione che descrive gli aspetti fondamentali della corrente 3D attorno all'ala di apertura finita. Più in particolare, la nuova equazione riguarda una funzione incognita della coordinata  $z$  nella terza dimensione lungo l'apertura dell'ala. In altre parole le tre funzioni considerate permettono di analizzare la corrente tridimensionale mediante una scomposizione delle direzioni introdotta genialmente da Prandtl: prima si risolvono i problemi 2D relativi alle varie sezioni dell'ala e poi si scrive un problema nella direzione trasversale ai piani delle sezioni. La funzione  $\alpha_{\ell=0}(z)$  contiene la sola informazione

<sup>2</sup> La necessità di variare la geometria dei profili lungo l'apertura è dettata da ragioni diverse, quali le necessità strutturali, il momento flettente e torcente massimo alla radice dell'ala, ragioni funzionali, per esempio la necessità di far posto a serbatoi o carrelli, e da ragioni di manovrabilità e sicurezza del volo, lo stallo non deve cominciare dall'estremità alare dove sono presenti le superfici di governo.





ottenuta risolvendo i problemi bidimensionali della teoria dei profili sottili che è necessaria per la teoria tridimensionale, nota con il nome di **teoria della linea portante di Prandtl e Lanchester**.

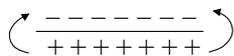
Come ultima osservazione riguardante la pianta di un'ala, osserviamo che l'angolo formato dalla linea congiungente i centri aerodinamici dei profili che costituiscono l'ala con l'asse  $z$  è un parametro importante per determinare le caratteristiche aerodinamiche dell'ala stessa e viene detto angolo di **freccia**, che può essere funzione dell'apertura e viene indicato con la funzione  $\beta(z)$ . Per semplicità, in questo capitolo considereremo solo ali con freccia nulla.

Come nello studio dei profili sottili sviluppato nel capitolo precedente, anche l'analisi delle correnti attorno a un'ala finita che sarà svolta in questo capitolo si basa sull'ipotesi che la direzione della corrente incidente formi un angolo piccolo rispetto al piano dell'ala e che gli effetti viscosi siano confinati in uno strato sottile sulla superficie dell'ala.

## 8.2 Vortici dell'ala finita

Per determinare il funzionamento aerodinamico di un'ala reale, ricordiamo per prima cosa che la generazione della portanza su un profilo alare è stata spiegata come effetto della differenza di pressione fra la superficie del dorso e quella del ventre del profilo stesso: il dorso è in depressione rispetto al ventre, con la conseguente generazione di una forza diretta verso l'alto. Nel caso di un'ala di **apertura infinita**, la zona di sovrappressione e la zona in depressione sono separate completamente dalla presenza della superficie del corpo portante, che è supposto di estensione illimitata.

Diversamente, nel caso di un'ala di **apertura finita**, in corrispondenza delle sue estremità la separazione viene meno e quindi in queste regioni il fluido tende a muoversi dalla parte inferiore verso quella superiore a causa dei valori diversi della pressione. Pertanto nelle regioni vicino alle estremità dell'ala il fluido inizia a ruotare dal ventre verso il dorso girando all'esterno delle estremità alari, come mostrato nella figura 8.2. A valle dell'ala, questo moto assume l'aspetto di due vortici controrotanti che sono chiamati di solito **vortici di estremità**. Questi vortici hanno in realtà una struttura complicata a causa dell'interazione con la corrente dietro il bordo di uscita dell'ala. Si comprende allora che il modello di corrente bidimensionale, alla base della teoria dei profili sottili, non è in grado di rappresentare la corrente tridimensionale effettivamente presente attorno a un'ala reale.

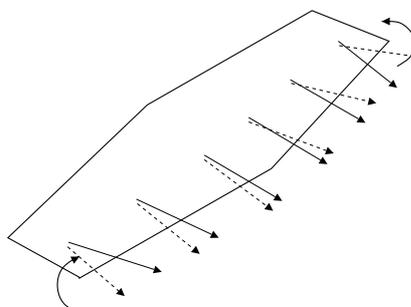


**Figura 8.2**  
Origine dei vortici di estremità





**Figura 8.3** Direzione della velocità vicino alle estremità e al bordo d'uscita di un'ala di apertura finita



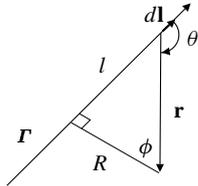
Il moto del fluido generato nella regione delle estremità alari modificherà la corrente principale nel senso che la direzione della velocità sul dorso sarà deviata verso la parte centrale dell'ala (ossia verso l'interno) mentre sul ventre sarà deviata verso l'esterno, come mostrato nella figura 8.3.

Questo tipo di differenza nella direzione della velocità, ma non nel suo modulo, è compatibile con la condizione di Kutta nei punti del bordo d'uscita, per cui si intuisce che, a partire dal bordo di uscita dell'ala, può formarsi una superficie di discontinuità della componente orizzontale della velocità, cioè una scia vorticoso orizzontale, che è chiamata **scia di Prandtl**. Un'eventuale sezione di questa superficie, eseguita con un piano perpendicolare alla direzione della velocità asintotica, metterebbe in evidenza una linea di discontinuità della componente  $z$  della velocità fra la zona superiore e quella inferiore del fluido. La presenza di questa scia influisce su tutto il campo di moto, modificando le prestazioni dell'ala rispetto alla situazione ideale dell'ala di apertura infinita. Per cercare di descrivere in maniera quantitativa e non solo qualitativa il comportamento di un'ala reale occorre però partire da un'analisi più approfondita della corrente tridimensionale in presenza di un vortice il cui asse esce da una superficie.

### Legge di Biot–Savart

Incominciamo a studiare il campo di velocità associato alla presenza di un vortice rettilineo infinito. A tale fine, assumiamo, senza dimostrarla, la relazione che descrive il contributo al campo di velocità associato a un tratto infinitesimo di lunghezza  $d\mathbf{l}$  di un filamento vorticoso, o vortice rettilineo, di circolazione  $\Gamma$ . Questa relazione è analoga a quella che descrive il contributo al campo magnetico statico dovuto a un elemento di corrente elettrica stazionaria in un filo rettilineo, e che è nota come **legge di Biot–Savart**. Nel caso fluidodinamico questa legge dice che il contributo elementare  $d\mathbf{u}$  alla **velocità indotta** da un tratto infinitesimo  $d\mathbf{l}$  di





**Figura 8.4** Contributo elementare al campo di velocità di un vortice rettilineo avente direzione e circolazione  $\Gamma$

Vedi paragrafo 3.7.

un vortice rettilineo di intensità  $\Gamma$  è dato da

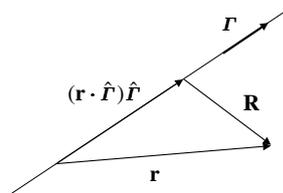
$$d\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che va da  $d\mathbf{l}$  al punto  $P$  in cui si calcola la velocità, come mostrato nella figura 8.4 in margine.

Incominciamo col verificare che, nel caso di una distribuzione rettilinea di elementi vorticosi, la legge di Biot–Savart conduce allo stesso campo di velocità del vortice rettilineo studiato nel capitolo 3. Consideriamo allora la somma di tutti i contributi di velocità indotta nel punto  $P$  da parte di tutti gli elementi del filamento vorticoso rettilineo infinito mostrato nella figura 8.4.

L'espressione del contributo alla velocità indotta contiene il prodotto vettoriale  $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$  per cui la velocità risultante  $\mathbf{u}$  sarà perpendicolare al piano contenente l'asse del vortice e il punto  $\mathbf{r}$ ; inoltre il verso di  $\mathbf{u}$  è dato dalla regola della mano destra. Per determinare il modulo di  $\mathbf{u}$ , indichiamo con  $R$  la distanza del punto  $P$  dall'asse del vortice e sia  $\theta$  l'angolo compreso fra  $\mathbf{r}$  e l'asse. Allora,  $|\mathbf{r}| = R/\sin \theta$  e  $|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}| = (R/\sin \theta) dl \sin \theta = R dl$ . Prendiamo poi come origine della variabile di integrazione  $l$  la proiezione sull'asse del vortice del punto  $P$  in cui si calcola la velocità. Risulta allora  $l = R \tan \phi = R \tan (\theta - \frac{\pi}{2}) = -R \cot \theta$ , e, differenziando,  $dl = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$  per cui  $|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}| = R^2 d\theta / \sin^2 \theta$ . Il modulo della velocità risultante dall'integrazione lungo tutto il vortice rettilineo sarà quindi dato dalla relazione

$$|\mathbf{u}(P)| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{R^3} \frac{R^2 d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi R}.$$



**Figura 8.5** Proiezione del vettore posizione  $\mathbf{r}$  nelle direzioni parallela e normale all'asse di un vortice rettilineo

Volendo scrivere il campo della velocità del vortice rettilineo infinito in forma vettoriale, possiamo introdurre il vettore circolazione  $\Gamma$  diretto come l'asse del vortice e con intensità uguale alla sua circolazione attorno all'asse. Otteniamo

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma \times \hat{\mathbf{R}}}{R},$$

dove  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\Gamma}) \hat{\Gamma}$ . Questo risultato coincide con il campo di moto del vortice rettilineo infinito, espresso in coordinate cilindriche, con l'asse  $z$  coincidente con la direzione dell'asse del vortice.

Per giungere a valutazioni quantitative occorre caratterizzare in maniera più precisa il comportamento della scia. A questo fine è necessario conoscere alcune proprietà geometriche fondamentali del campo vettoriale della vorticità.





$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

Bla Bla

Supponiamo ora di potere considerare la velocità indotta solo da *meta* di un vortice rettilineo. Un vortice di questo tipo non può esistere nel fluido in assenza di pareti solide ma, come vedremo, è invece possibile se l'asse del vortice esce da una parete solida. Chiameremo convenzionalmente questo vortice semi-rettilineo **semi-vortice rettilineo**. La velocità indotta da un tale semi-vortice risulterebbe essere metà del valore precedente, ossia, dovremmo poter scrivere

$$|\mathbf{u}(P)| = \frac{\Gamma}{4\pi R} \quad (\text{vortice rettilineo semi-infinito}).$$

A rigore, il contributo elementare della legge di Biot–Savart non può essere interpretato come diretta conseguenza fisica del termine elementare di vorticità  $\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma d\mathbf{l}$ . Un'interpretazione fisica corretta della legge di Biot–Savart richiede di considerare l'integrale su un intero vortice. In effetti la formula precedente non tiene conto degli effetti di bordo dovuti al carattere troncato del vortice. Considerare solo metà di un vortice rettilineo rappresenta quindi più un artificio euristico per ricavare la soluzione che non un ragionamento suscettibile di un'interpretazione dotata di significato fisico.

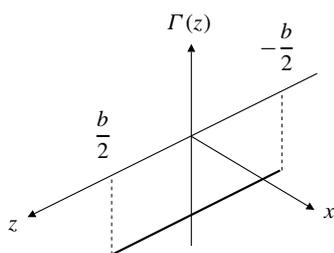
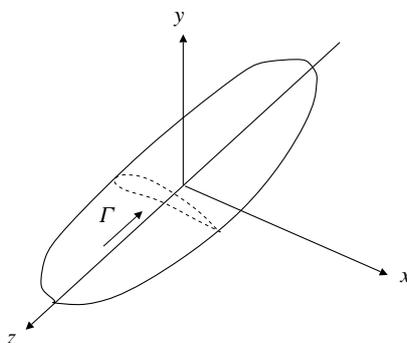
## 8.3 Velocità indotta dai vortici dell'ala finita

Una volta dimostrati i teoremi di Kelvin–Helmholtz, abbiamo gli strumenti per comprendere il funzionamento di un'ala di apertura finita. Prendiamo un'ala che generi una portanza e consideriamo le sue sezioni mediante piani paralleli fra loro e normali all'asse  $z$  dell'ala, come mostrato nella figura 8.6.





**Figura 8.6** Sezione di un'ala di apertura finita (il verso della circolazione  $\Gamma$  corrisponde ad una situazione portante)



**Figura 8.7** Ipotesi provvisoria di circolazione uniforme lungo l'apertura di un'ala finita, in condizione portante ( $\Gamma < 0$ )

Ciascun profilo ottenuto da una determinata sezione sarà caratterizzato da una sua propria portanza  $\ell(z)$  per unità di apertura, come il profilo della sezione mostrata nella figura 8.6. L'integrale di  $\ell(z)$  lungo tutta l'apertura fornirà la portanza totale  $L$  dell'ala finita. Alla portanza locale  $\ell(z)$  corrisponderà, in base al teorema di Kutta–Joukowski, una circolazione locale  $\Gamma(z) = -\frac{\ell(z)}{\rho U}$  anch'essa funzione della distanza  $z$  dal piano mediano dell'ala.

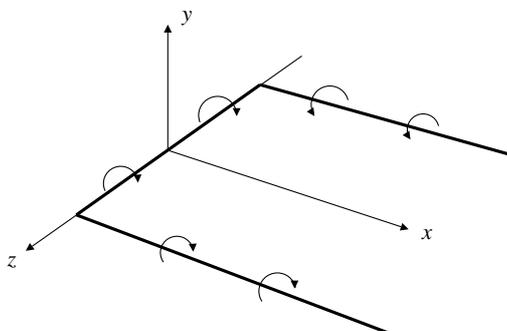
Supponiamo temporaneamente che  $\Gamma(z)$  sia costante e che la corrente attorno all'ala possa essere schematizzata come prodotta da un tratto finito di un vortice rettilineo disposto lungo l'apertura e di intensità  $\Gamma$ ; ovvero sia assumiamo che sia  $\Gamma(z) = \Gamma = \text{costante}$ , come mostrato nella figura 8.7 a lato, supponendo  $\Gamma < 0$ . Dato che il secondo teorema di Kelvin–Helmholtz stabilisce che un vortice filamentoso (o un tubo di vorticità) deve richiudersi su sè stesso oppure estendersi fino al contorno (parete solida o all'infinito) del campo di moto, è legittimo domandarsi che cosa accade a tale tratto di vortice finito agli estremi dell'ala.

D'altra parte, come abbiamo visto in precedenza analizzando qualitativamente la corrente attorno all'ala vicino alle sue estremità, il moto del fluido in queste due zone assume l'aspetto di due semi-vortici rettilinei allineati con la direzione della velocità esterna, che contribuiscono a formare una scia dietro l'ala. Siccome questi due vortici ruotano in versi opposti ma sono entrambi coerenti con il verso della circolazione  $\Gamma$  del vortice associato all'ala, si può descrivere l'insieme come un unico vortice a forma di U o a *ferro di cavallo* costituito da tre tratti di vortici rettilinei, di cui due semi-infiniti e uno di lunghezza finita compreso fra gli altri due, come mostrato nella figura 8.8.





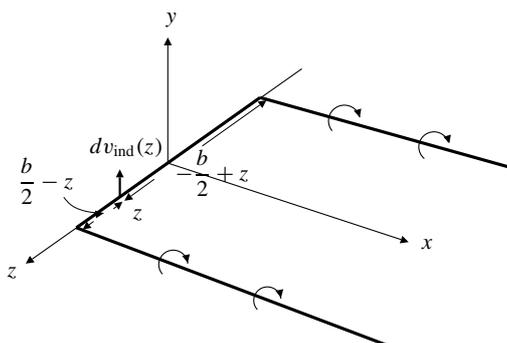
**Figura 8.8** Ipotesi del vortice a ferro di cavallo. Il verso della circolazione mostrato nel disegno lungo i tre lati del vortice a U corrisponde alla situazione di una corrente portante ( $\Gamma(z) < 0$ )



Consideriamo adesso il campo di moto associato ai due filamenti vorticosi semi-rettilinei cui abbiamo supposto di potere ridurre la scia. Chiameremo questo campo di velocità, abusando un po' del termine, **velocità indotta**. In particolare siamo interessati a calcolare la velocità indotta in corrispondenza dei punti del vortice di lunghezza finita che schematizza l'ala, che chiameremo **vortice portante**. Utilizzando la relazione ricavata in precedenza per il tratto di semi-vortice rettilineo, siamo in grado di esprimere la velocità indotta in funzione della posizione  $z$  lungo l'ala.

Se gli assi dei due semi-vortici sono posti in corrispondenza a  $z = \frac{1}{2}b$  e  $z = -\frac{1}{2}b$ , le velocità indotte da entrambi in un punto del vortice portante di coordinata  $z$  saranno dirette come l'asse  $z$  e nel suo verso positivo, come mostrato nella figura 8.9.

**Figura 8.9** Schema per il calcolo della velocità verticale indotta nel punto  $z$  della linea portante dovuta ai vortici di estremità. Nel disegno il verso dei due vortici è immaginato positivo ai fini del calcolo della velocità verticale con il segno corretto





Il contributo alla velocità in  $z$  da parte del vortice con semi-asse uscente dall'estremità alare  $z = b/2$  è

$$v_{\text{ind}}^+(z) = \frac{\Gamma}{4\pi(b/2 - z)}, \quad |z| \leq \frac{b}{2},$$

mentre il contributo del secondo vortice con semi-asse uscente dall'altra estremità  $z = -b/2$  è

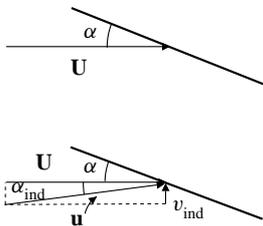
$$v_{\text{ind}}^-(z) = \frac{\Gamma}{4\pi(b/2 + z)}, \quad |z| \leq \frac{b}{2}.$$

La velocità indotta dai due vortici sarà semplicemente la somma dei due contributi appena calcolati, ossia  $v_{\text{ind}}(z) = v_{\text{ind}}^+(z) + v_{\text{ind}}^-(z)$ , per cui otteniamo

$$v_{\text{ind}}(z) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{b^2/4 - z^2}, \quad |z| \leq \frac{b}{2}.$$

Osserviamo che il segno della velocità indotta è concorde con quello della circolazione. Ad esempio, in condizioni portanti,  $\Gamma$  sarà negativa e la velocità indotta  $v_{\text{ind}}(z)$  è diretta verso il basso (in inglese è chiamata "downwash").

In corrispondenza del vortice portante la velocità indotta dalla scia va a sommarsi con la velocità della corrente indisturbata, modificando la velocità incidente sull'ala sia in direzione sia in intensità. La velocità risultante lungo il vortice portante sarà data quindi dalla seguente somma vettoriale:



$$\mathbf{u}(z) = U \hat{\mathbf{x}} + v_{\text{ind}}(z) \hat{\mathbf{z}} \quad |z| \leq \frac{b}{2},$$

per cui il modulo della velocità  $\mathbf{u}(z)$  che incide effettivamente sull'ala nelle diverse sezioni è dato da

$$|\mathbf{u}(z)| = \sqrt{U^2 + v_{\text{ind}}^2(z)}, \quad |z| \leq \frac{b}{2}.$$

**Figura 8.10** Figura superiore: angolo d'incidenza per il profilo piatto. Figura inferiore: triangolo delle velocità e angolo d'incidenza indotta.

Consideriamo il triangolo delle velocità nel disegno inferiore della figura 8.10. Se, in una data stazione in apertura, la velocità indotta è positiva (cioè diretta verso l'alto), l'angolo d'incidenza a cui lavora il relativo profilo aumenta di un angolo  $\alpha_{\text{ind}}(z)$ , che è chiamato **angolo d'incidenza indotta** ed è quindi definito da:

$$\alpha_{\text{ind}}(z) = \tan^{-1} \left( \frac{v_{\text{ind}}(z)}{U} \right), \quad |z| \leq \frac{b}{2}.$$





Come si può vedere, anche l'angolo d'incidenza indotta  $\alpha_{ind}(z)$  ha lo stesso segno della velocità indotta  $v_{ind}(z)$  e quindi anche della circolazione  $\Gamma(z)$ . Si ricorda che  $\alpha$  rappresenta l'angolo compreso fra il profilo e la direzione dell'asse  $x$  ed è positivo se antiorario.

Considerando ancora la stessa figura, possiamo allora introdurre l'angolo d'incidenza effettivo, che si indica con  $\alpha_{eff}$  e che è definito da

$$\alpha_{eff}(z) = \alpha(z) + \alpha_{ind}(z), \quad |z| \leq \frac{b}{2}.$$

Notiamo che mentre  $\alpha(z)$  rappresenta una funzione nota, la funzione  $\alpha_{ind}(z)$ , e quindi anche  $v_{ind}(z)$ , sono invece da determinare.

## 8.4 Resistenza indotta

La variazione nella direzione della velocità incidente in corrispondenza del profilo nelle varie sezioni dell'ala ricavata nel paragrafo precedente, produce effetti di grande importanza sul funzionamento di un'ala di apertura finita.

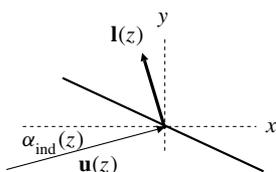
Innanzitutto, poiché l'angolo d'incidenza effettivo a cui è sottoposto il profilo di ogni sezione dipende dalla sua posizione  $z$  in apertura, si crea un legame inscindibile fra la distribuzione di portanza sull'ala e la distribuzione di circolazione nella scia.

Inoltre, poiché il vortice portante è investito da una velocità 'ruotata' dell'angolo d'incidenza indotta, anche la direzione della forza portante risulterà ruotata dello stesso angolo, in virtù del teorema della portanza di Kutta–Joukowski dimostrato nel paragrafo 7.4, per il quale la forza generata da una corrente incomprimibile e irrotazionale su qualunque cilindro è diretta normalmente alla velocità incidente sul cilindro.

Sia allora  $\mathbf{l}(z)$  la portanza per unità di apertura generata dal profilo in corrispondenza della sezione  $z$ , come mostrato nella figura 8.11. Per il teorema di Kutta–Joukowski, la portanza per unità di apertura è

$$\mathbf{l}(z) = \bar{\rho} \mathbf{u}(z) \times \Gamma(z).$$

La forza corrispondente è normale al vettore velocità  $\mathbf{u}(z)$ , somma vettoriale della velocità del campo lontano e della velocità indotta, come mostrato nella figura 8.11, per cui la portanza  $\mathbf{l}(z)$  può essere scomposta nelle due direzioni  $x$  e  $y$ , rispettiva-



**Figura 8.11** Scomposizione della portanza lungo le coordinate cartesiane in corrispondenza della sezione  $z$  di un'ala di apertura finita





mente parallela e normale alla velocità asintotica  $\mathbf{U}$ :

$$\ell_x(z) = -\ell(z) \sin \alpha_{\text{ind}}(z) = -|\mathbf{l}(z)| \sin \alpha_{\text{ind}}(z),$$

$$\ell_y(z) = \ell(z) \cos \alpha_{\text{ind}}(z) = |\mathbf{l}(z)| \cos \alpha_{\text{ind}}(z),$$

e, in virtù del teorema della portanza,

$$\ell_x(z) = \bar{\rho} |\mathbf{u}(z)| \Gamma(z) \sin \alpha_{\text{ind}}(z),$$

$$\ell_y(z) = -\bar{\rho} |\mathbf{u}(z)| \Gamma(z) \cos \alpha_{\text{ind}}(z).$$

Poiché, come anticipato, la circolazione, la velocità indotta e l'angolo d'incidenza indotta hanno sempre lo stesso segno, la componente della forza in direzione  $x$  è sempre positiva e costituisce dunque in ogni caso una resistenza, alla quale si dà il nome di **resistenza indotta**.

La presenza di una componente  $\ell_x(z)$  non nulla nella corrente attorno all'ala di apertura finita significa che questa corrente incomprimibile inviscida non soddisfa almeno una delle ipotesi alla base del paradosso di d'Alembert. Infatti, a causa della presenza della scia a valle dell'ala e dell'estendersi della scia all'infinito, la corrente non diventa uniforme allontanandosi dal corpo in *qualunque* direzione dello spazio.

## 8.5 Teoria della linea portante

Il modello adottato fin'ora, quello che prevede la presenza di un unico filamento vorticoso di circolazione costante, è molto grossolano. Si può vedere, analizzando la formula che fornisce l'angolo di incidenza indotta, che se un'ala fosse effettivamente rappresentabile come un vortice portante di circolazione costante, i profili lungo l'apertura lavorerebbero con angoli di incidenza differenti, che si avvicinano a  $-90^\circ$  man mano che ci si avvicina all'estremità dell'ala. Questa previsione del modello non è molto soddisfacente e in particolare ci fa intuire che anche per un'ala rettangolare non svergolata, la forma più semplice, la distribuzione di circolazione in apertura non sarà costante. Questo è effettivamente quello che si osserva sperimentalmente.

Questo ragionamento ci porta a concludere che lo schema del vortice a  $U$  con distribuzione di  $\Gamma(z)$  uniforme lungo tutta l'ala è davvero troppo grossolano per descrivere in maniera adeguata il comportamento di un'ala reale. D'altronde, fin dall'inizio, avevamo osservato che, a causa della discontinuità al bordo d'uscita fra la velocità dell'aria proveniente dal dorso e la velocità dell'aria proveniente dal





ventre, si generava una superficie di discontinuità della componente orizzontale della velocità dietro il bordo d'uscita. Proviamo dunque a delineare un modello più accurato che tenga conto di questa osservazione.

Incominciamo con l'osservare che l'ipotesi fatta di circolazione costante lungo il vortice portante può essere rilassata se supponiamo che le variazioni di circolazione al suo interno si ritrovino nella scia. Quindi esisterà un legame fra la circolazione  $\Gamma(z)$  del vortice portante e la circolazione per unità di apertura  $\gamma(z)$  presente nella scia, che indicheremo pertanto con  $\gamma_{scia}(z)$ . Si noti che la distribuzione di circolazione  $\gamma_{scia}(z)$  si riferisce a *semi*-vortici rettilinei nella direzione del moto e non deve essere confusa con la variabile  $\gamma(x)$  usata nella teoria dei profili sottili che riguardava invece dei vortici rettilinei diretti perpendicolarmente al piano del moto bidimensionale.

Determiniamo ora un legame fra le due variabili  $\Gamma(z)$  e  $\gamma_{scia}(z)$  in modo tale che i teoremi sui vortici filamentosi siano soddisfatti. Consideriamo due punti vicini sul vortice portante, di coordinate  $z$  e  $z + \Delta z$  rispettivamente. La circolazione nei due punti sarà rispettivamente  $\Gamma(z)$  e  $\Gamma(z + \Delta z)$ . Per il teorema sulla conservazione della circolazione nei tubi vorticosi alla variazione di circolazione nel vortice portante  $\Gamma(z + \Delta z) - \Gamma(z)$  deve corrispondere una medesima circolazione nella scia. Essa sarà costituita, per il nostro modello, da una circolazione per unità di apertura della scia  $\gamma_{scia}(z)$  distribuita sull'apertura elementare  $\Delta z$  della scia e sarà quindi data da  $\gamma_{scia}(z) \Delta z$ .

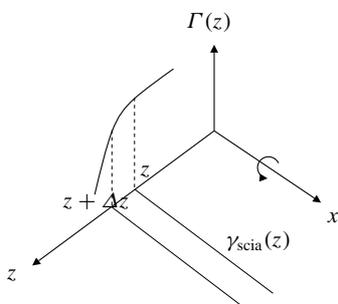
Supponiamo  $\gamma_{scia}(z)$  positiva se il vettore che la rappresenta ha il verso dell'asse  $x$ , negativa altrimenti. Come mostrato in figura 8.12, una diminuzione della circolazione all'aumentare di  $z$  determina una circolazione positiva nella scia, a un aumento lungo l'apertura della circolazione sul vortice portante corrisponderà invece una circolazione negativa nella scia. Questo ci porta a concludere che la relazione cercata è

$$\Gamma(z + \Delta z) - \Gamma(z) = -\gamma_{scia}(z) \Delta z,$$

da cui si ricava, dividendo per  $\Delta z$  e passando al limite per  $\Delta z \rightarrow 0$ ,

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = -\gamma_{scia}(z).$$

Per comprendere meglio la presenza del segno negativo nell'equazione precedente possiamo ragionare utilizzando dei vortici a U. Supponiamo di affiancare due vortici a U di diversa intensità, rispettivamente  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , i cui vortici portanti siano disposti sull'asse  $z$ . Il verso positivo della circolazione è rappresentato dalle frecce.



**Figura 8.12** Legame fra andamento della circolazione  $\Gamma(z)$  attorno a una sezione dell'ala finita e la distribuzione della circolazione per unità di apertura  $\gamma_{scia}(z)$  dei vortici semi-rettilinei della scia





Supponiamo che  $\Gamma_1 > \Gamma_2 > 0$  e avviciniamo i due vortici fino a far coincidere il vortice di scia sinistro del primo, che ha intensità  $\Gamma_1$  positiva perché il suo verso è concorde con quello dell'asse  $x$ , con il vortice di scia destro del secondo vortice, di intensità  $-\Gamma_2$  nella convenzione di segno adottata. Questa operazione ci porta ad avere un unico vortice portante con circolazione che aumenta bruscamente da  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$ . In corrispondenza dell'aumento della circolazione del vortice portante abbiamo un vortice di scia di intensità  $-\Gamma_2 + \Gamma_1$ , ottenuto dalla somma algebrica dei vortici di scia dei due vortici a  $U$  considerati, che è negativo per le ipotesi fatte.

## 8.6 Equazione della linea portante (integro-differenziale)

Una volta ottenuta la relazione che lega la distribuzione di circolazione  $\Gamma(z)$  lungo l'apertura del vortice portante con la distribuzione di circolazione  $\gamma_{scia}(z)$  per unità di apertura nella scia, dobbiamo ricercare un'equazione che ci permetta di ricavare l'incognita  $\Gamma(z)$  una volta assegnata la geometria dell'ala, la sua incidenza geometrica e naturalmente la velocità della corrente lontano da essa.

Per far questo introduciamo alcune ipotesi semplificative. Innanzitutto supponiamo che sia applicabile la teoria dei profili sottili in ogni sezione dell'ala. In questo caso il coefficiente di portanza del profilo relativo alla sezione  $z$  sarà dato dalla relazione

$$c_\ell(z) = 2\pi [\alpha_{\text{eff}}(z) - \alpha_{\ell=0}(z)].$$

Il coefficiente di portanza è stato scritto in funzione dell'angolo di incidenza efficace, poiché questo è l'angolo d'incidenza con cui il fluido lambisce il profilo.

D'altra parte, ricordando il teorema di Kutta–Joukowski il coefficiente adimensionale di portanza è definito da

$$c_\ell = \frac{-\bar{\rho} |\mathbf{u}| \Gamma}{\frac{1}{2} \bar{\rho} |\mathbf{u}|^2 c} = -\frac{2\Gamma}{|\mathbf{u}| c} \quad \Rightarrow \quad c_\ell(z) = -\frac{2\Gamma(z)}{|\mathbf{u}(z)| c(z)}.$$

Sostituendo l'espressione di  $c_\ell(z)$  nell'equazione precedente si trova il legame fra la circolazione e l'angolo d'incidenza, che risulta essere

$$\frac{\Gamma(z)}{\pi |\mathbf{u}(z)| c(z)} = -\alpha_{\text{eff}}(z) + \alpha_{\ell=0}(z).$$

Possiamo a questo punto sostituire all'angolo d'incidenza efficace  $\alpha_{\text{eff}}(z)$  la sua espressione ricavata in precedenza,  $\alpha_{\text{eff}}(z) = \alpha(z) + \alpha_{\text{ind}}(z)$ , ottenendo

$$\frac{\Gamma(z)}{\pi |\mathbf{u}(z)| c(z)} + \alpha_{\text{ind}}(z) = -\alpha(z) + \alpha_{\ell=0}(z),$$





dove, come già visto,  $\alpha_{\text{ind}}(z) = \tan^{-1}(v_{\text{ind}}(z)/U)$ .

Avendo supposto valida la teoria dei profili sottili, l'angolo d'incidenza geometrica e l'angolo d'incidenza indotta devono essere piccoli. Questo ci consente di approssimare la tangente di un angolo con l'angolo stesso, per cui scriviamo

$$\alpha_{\text{ind}}(z) \simeq v_{\text{ind}}(z)/U,$$

e anche di considerare la velocità indotta  $v_{\text{ind}}(z)$  trascurabile rispetto a quella asintotica, per cui

$$|\mathbf{u}(z)| \simeq U.$$

Di conseguenza la relazione contenente l'incognita  $\Gamma(z)$  diventa

$$\frac{\Gamma(z)}{\pi U c(z)} + \frac{v_{\text{ind}}(z)}{U} = -\alpha(z) + \alpha_{\ell=0}(z).$$

Rimane ora il problema di determinare la velocità  $v_{\text{ind}}(z)$  indotta dalla scia di Prandtl. Per fare questo possiamo utilizzare le relazioni viste in precedenza per i semi-vortici rettilinei. In questo caso un tratto di apertura infinitesima  $d\zeta$  della scia, in corrispondenza della coordinata  $z = \zeta$ , si comporterà come un semi-vortice rettilineo, e darà un contributo alla velocità indotta nel punto  $z$

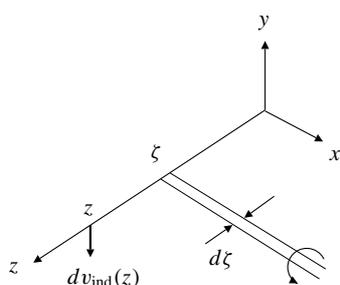
$$dv_{\text{ind}}(z) = -\frac{\gamma_{\text{scia}}(\zeta) d\zeta}{4\pi} \frac{1}{z - \zeta},$$

dove il segno negativo è dovuto al fatto che il contributo della velocità verticale è diretto in senso opposto al verso positivo dell'asse  $z$ , come mostrato nella figura 8.13. Introducendo la relazione fra la derivata della circolazione sul vortice portante e la circolazione per unità di apertura nella scia ricavata nel paragrafo precedente, si ottiene, come mostrato nella figura 8.13,

$$dv_{\text{ind}}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z - \zeta}.$$

Integrando su tutta l'apertura alare il contributo di ciascun elemento della scia, si ottiene l'espressione della velocità indotta

$$v_{\text{ind}}(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z - \zeta}.$$



**Figura 8.13** Contributo alla velocità indotta dovuta a una circolazione elementare della scia





Si noti il simbolo di integrazione adottato  $\int$ . Poiché la funzione integranda ha una singolarità non integrabile del tipo  $1/z$ , il suo integrale di Riemann non esiste. Del resto la singolarità non ha luogo nella realtà essendo presente la viscosità a smorzare le velocità nel nucleo del vortice. Si adotta per questo motivo un'integrazione nel senso del valore principale secondo Cauchy, per la quale le due aree infinite ma di segno opposto sottese dalla funzione integranda si cancellano vicendevolmente.

L'espressione integrale di  $v_{ind}(z)$  può essere sostituita nell'equazione per  $\Gamma(z)$  per ottenere un'equazione in questa sola incognita

$$\frac{\Gamma(z)}{\pi U c(z)} + \frac{1}{4\pi U} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z - \zeta} = -\alpha(z) + \alpha_{\ell=0}(z).$$

Questa equazione è nota come **equazione della teoria della linea portante** di Prandtl–Lanchester. Essa consiste in un legame che deve essere soddisfatto, per ogni valore di  $z$  nell'intervallo  $[-b/2, b/2]$ , dalla funzione incognita  $\Gamma(z)$  da determinare nello stesso intervallo. L'equazione è **integro-differenziale** in quanto sotto il segno d'integrale compare la derivata della funzione incognita  $\Gamma(z)$ . Notiamo che si devono imporre condizioni supplementari agli estremi dell'intervallo per avere una soluzione unica, proprio come nel caso dell'equazione integrale per i profili sottili dove era necessaria la condizione di Kutta. La condizione appropriata dal punto di vista fisico richiede che la circolazione si annulli alle estremità dell'ala, ovvero sia:

$$\Gamma(\pm b/2) = 0.$$

Come l'equazione integrale della teoria dei profili sottili studiata nel capitolo precedente, anche l'equazione integro-differenziale della teoria della linea portante è lineare e ha un nucleo debolmente singolare. A causa di questo secondo fatto l'integrale che compare nell'equazione deve essere inteso nel senso di Cauchy: il punto singolare  $\zeta = z$  richiede infatti a considerare separatamente i due integrali  $\int_{-b/2}^z$  e  $\int_z^{b/2}$ , ed entrambi risultano in generale divergenti. L'operazione d'integrazione nel senso di Cauchy (indicata dal simbolo col trattino) consiste nel calcolare il limite della somma dei due integrali  $\int_{-b/2}^{z-\epsilon}$  e  $\int_{z+\epsilon}^{b/2}$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

**Osservazione** La presenza delle due funzioni  $\Gamma(z)$  e  $c(z)$  nel primo termine dell'equazione considerata ha significati molto diversi. La funzione  $c(z)$  è una funzione nota, come le altre due,  $\alpha(z)$  e  $\alpha_{\ell=0}(z)$  che compaiono nel secondo membro, mentre la funzione  $\Gamma(z)$  è l'incognita dell'equazione integro-differenziale. La variabile  $z$  deve apparire esplicitamente dato che nelle equazioni integrali esiste sempre una variabile libera.





## 8.7 Caratteristiche aerodinamiche dell'ala

La soluzione  $\Gamma(z)$  dell'equazione della linea portante permette di determinare le caratteristiche aerodinamiche dell'ala di apertura finita. Per prima cosa abbiamo l'**angolo d'incidenza indotta**

$$\alpha_{\text{ind}}(z) = \frac{v_{\text{ind}}(z)}{U} = \frac{1}{4\pi U} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{z - \zeta}.$$

Inoltre si potranno calcolare le seguenti quantità aerodinamiche nella loro versione locale e globale:

1. La distribuzione della **portanza locale** per unità di apertura in base al teorema della portanza di Kutta–Joukowski

$$\begin{aligned} \ell_y(z) &= \ell(z) \cos \alpha_{\text{ind}}(z) \\ &\simeq \ell(z) = -\bar{\rho} U \Gamma(z). \end{aligned}$$

Per indicare la portanza usiamo la lettera  $\ell$ , che è molto diffusa nella letteratura aeronautica per aderenza al termine inglese *lift*.

2. La **portanza totale** dell'ala, ottenuta integrando la relazione precedente,

$$L \equiv \int_{-b/2}^{b/2} \ell_y(z) dz = -\bar{\rho} U \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) dz.$$

Da questa quantità si ricava il **coefficiente di portanza** dell'ala finita

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \bar{\rho} U^2 S} = -\frac{2}{US} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) dz.$$

3. La **resistenza indotta locale** per unità di apertura:

$$\begin{aligned} d_{\text{ind}}(z) &= \ell_x(z) = -\ell(z) \sin \alpha_{\text{ind}}(z) \\ &\simeq -\ell(z) \alpha_{\text{ind}}(z) = \bar{\rho} U \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z). \end{aligned}$$

Per indicare la resistenza usiamo la lettera  $d$ , che è assai diffusa nella letteratura aeronautica per aderenza al termine inglese *drag*.

4. La **resistenza indotta totale** dell'ala. Questa quantità si ottiene integrando  $d_{\text{ind}}(z)$  lungo tutta l'apertura dell'ala, ottenendo

$$D_{\text{ind}} \equiv \int_{-b/2}^{b/2} d_{\text{ind}}(z) dz = \bar{\rho} U \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz.$$





Da questa quantità si ottiene la sua versione adimensionale, chiamata **coefficiente di resistenza indotta**

$$C_{D_{\text{ind}}} \equiv \frac{D_{\text{ind}}}{\frac{1}{2}\bar{\rho}U^2S} = \frac{2}{US} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz.$$

5. **Il momento di rollio.** Se la distribuzione di portanza sull'apertura non è simmetrica rispetto all'asse  $x$ , come accade per esempio nel caso di una manovra di alettoni, si genera un momento di rollio rispetto a tale asse. Il momento dovuto a un tratto infinitesimo di apertura  $dz$  è dato da

$$d\tau_{\text{rollio}}(z) = z \hat{\mathbf{z}} \times \ell_y(z) dz \hat{\mathbf{y}} = -\bar{\rho} \Gamma(z) U \hat{\mathbf{x}},$$

essendo  $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}$ . Integrando su tutta l'apertura si ottiene

$$-\tau_{\text{rollio}} \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}} \int_{-b/2}^{b/2} z \ell_y(z) dz = -\hat{\mathbf{x}} \int_{-b/2}^{b/2} -\bar{\rho} U z \Gamma(z) dz,$$

ovverosia

$$\tau_{\text{rollio}} = -\bar{\rho} U \int_{-b/2}^{b/2} z \Gamma(z) dz.$$

Si introduce poi il **coefficiente del momento di rollio**:

$$C_{\text{mom, rollio}} = \frac{\tau_{\text{rollio}}}{\frac{1}{2}\bar{\rho}U^2Sb} = -\frac{2}{USb} \int_{-b/2}^{b/2} z \Gamma(z) dz.$$

6. **Il momento di imbardata.** Se la distribuzione della portanza lungo l'apertura alare non è simmetrica rispetto all'asse  $x$ , non sarà simmetrica neanche la distribuzione della resistenza locale indotta per unità di superficie, e in questo modo si genera un momento di imbardata. Il momento di imbardata per un tratto infinitesimo di apertura  $dz$  è

$$d\tau_{\text{imb}}(z) = z \hat{\mathbf{z}} \times d_{\text{ind}}(z) dz \hat{\mathbf{x}}.$$

Essendo poi  $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$ , si ha

$$d\tau_{\text{imb}}(z) \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \int_{-b/2}^{b/2} z d_{\text{ind}}(z) dz.$$





D'altra parte risulta  $d_{\text{ind}}(z) \approx -\ell(z) \alpha_{\text{ind}}(z) = \bar{\rho} U \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z)$ , per cui, integrando su tutta l'apertura, si ottiene

$$\tau_{\text{imb}} = \bar{\rho} U \int_{-b/2}^{b/2} z \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz,$$

da cui si definisce il **coefficiente del momento di imbardata**

$$C_{\text{mom, imb}} = \frac{\tau_{\text{imb}}}{\frac{1}{2} \bar{\rho} U^2 S b} = \frac{2}{U S b} \int_{-b/2}^{b/2} z \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz.$$

Ad esempio, il momento di imbardata di un velivolo è l'effetto indesiderato associato alla manovra di alettoni che si compensa agendo sul timone di coda durante l'ingresso in virata. La manovra alettoni di ingresso in virata, infatti, aumenta il carico su una semiala, quella esterna alla virata, e lo diminuisce sull'altra, quella interna. A ciò è associato un aumento della resistenza indotta sulla semiala esterna e una sua diminuzione sulla semiala interna alla virata. Questa variazione produce un momento di imbardata che tende a far ruotare il velivolo nel senso opposto a quello della virata, e va dunque compensato mediante l'azionamento del timone di coda.

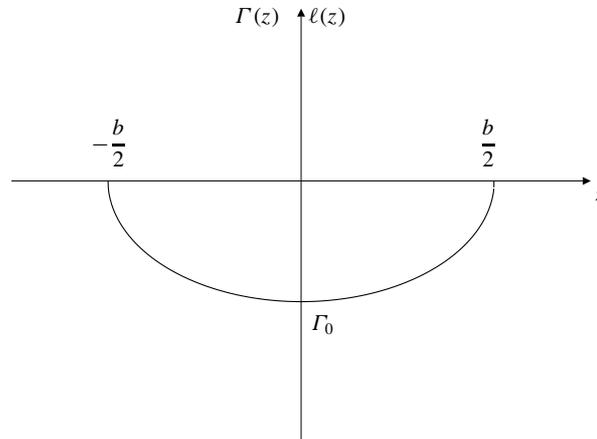
## 8.8 Distribuzione ellittica della portanza

Consideriamo una distribuzione della circolazione nelle varie sezioni dell'ala che abbia il seguente andamento

$$\Gamma(z) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2},$$

dove  $\Gamma_0$  è il valore della circolazione in corrispondenza della sezione centrale ( $z = 0$ ) dell'ala. La circolazione varia in modo ellittico con la distanza  $z$  lungo l'apertura: ha il valore assoluto massimo  $|\Gamma(0)| = |\Gamma_0|$  al centro dell'ala e si annulla alle due estremità per  $z = \pm b/2$ . Per questo motivo essa è chiamata **distribuzione ellittica della circolazione**, ed è mostrata nella figura 8.14.





**Figura 8.14** Distribuzione ellittica della circolazione e della portanza, in condizioni di corrente portante ( $\Gamma_0 < 0$ )

La distribuzione ellittica non è stata ricavata come soluzione dell'equazione integro-differenziale di Prandtl ma abbiamo soltanto supposto che tale distribuzione possa essere soluzione del problema. Notiamo che  $\Gamma_0$  non è un dato ma solo un elemento della soluzione dell'equazione integro-differenziale e quindi il suo valore è determinato dall'andamento delle tre funzioni (note) presenti nell'equazione stessa.

Verifichiamo ora quali potrebbero essere le proprietà aerodinamiche di un'ala con distribuzione ellittica della portanza.

Dato che, in base alla legge della portanza di Kutta-Joukowski,  $\ell = -\bar{\rho}U\Gamma$ , la portanza locale della distribuzione ellittica di  $\Gamma(z)$  è data da

$$\ell(z) = -\bar{\rho}U\Gamma_0\sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2}$$

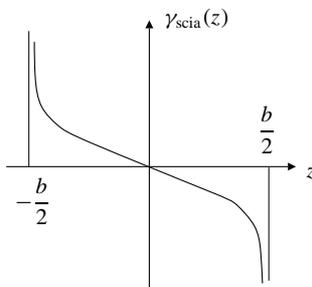
e quindi anche la distribuzione della portanza è ellittica.

Per prima cosa determiniamo la velocità verticale indotta. Calcoliamo la derivata della funzione  $\Gamma(z)$

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = -\frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{z}{\sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2}}$$

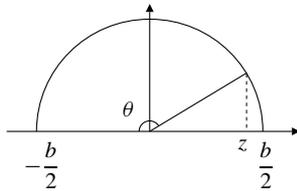
che è l'opposto della densità di circolazione  $\gamma_{scia}(z)$  ed è mostrata nella figura 8.15. Sostituendo la derivata nella definizione della velocità verticale indotta abbiamo

$$v_{ind}(z) = -\frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\zeta d\zeta}{(z - \zeta)\sqrt{1 - \left(\frac{2\zeta}{b}\right)^2}}$$



**Figura 8.15** Densità di circolazione  $\gamma_{scia}(z) = -d\Gamma(z)/dz$  della scia nel caso di distribuzione ellittica della circolazione e della portanza in condizioni di corrente portante ( $\Gamma_0 < 0$ )





**Figura 8.16** Cambiamento di variabili  $z \rightarrow \theta(z) = \cos^{-1}(-\frac{2z}{b})$  della coordinata in apertura di un'ala finita

Per calcolare l'integrale è utile considerare il cambiamento di variabili, rappresentato nella figura 8.16.

$$z = -\frac{b}{2} \cos \theta,$$

e quindi introdurre la funzione  $\hat{v}_{\text{ind}}(\theta)$  che esprime la velocità verticale indotta in funzione della nuova variabile  $\theta$ , in base alla definizione

$$\hat{v}_{\text{ind}}(\theta) = v_{\text{ind}}(z(\theta)) = v_{\text{ind}}\left(\cos^{-1}\left(-\frac{2z}{b}\right)\right).$$

La nuova variabile che corrisponde alla variabile di integrazione  $\zeta$  è indicata con  $\vartheta$ , per cui

$$\zeta = -\frac{b}{2} \cos \vartheta \quad \text{e} \quad d\zeta = \frac{b}{2} \sin \vartheta d\vartheta,$$

e l'integrale precedente diventa

$$\hat{v}_{\text{ind}}(\theta) = \frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta - \cos \theta} d\vartheta.$$

Questo integrale corrisponde al caso particolare  $n = 1$  della formula degli integrali definiti di Glauert incontrati nello studio della corrente attorno a un profilo piatto, che è ricavata nell'appendice H e che riportiamo per comodità:

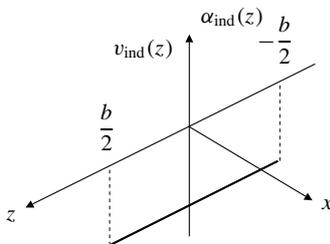
$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\vartheta)}{\cos \vartheta - \cos \theta} d\vartheta = \frac{\pi \sin(n\theta)}{\sin \theta}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Per  $n = 1$  l'integrale vale quindi  $\pi$  e pertanto si ottiene  $\hat{v}_{\text{ind}}(\theta) = v_{\text{ind}} = \frac{\Gamma_0}{2b}$ , ovvero

$$v_{\text{ind}} = \frac{\Gamma_0}{2b},$$

per  $|z| \leq b/2$ . Pertanto la velocità verticale indotta in un'ala con una portanza ellittica è uniforme lungo tutta l'apertura alare (sarà però nulla all'esterno), come mostrato nella figura 8.17. A sua volta, l'angolo d'incidenza indotta è dato da

$$\alpha_{\text{ind}} = \frac{v_{\text{ind}}}{U} = \frac{\Gamma_0}{2Ub},$$



**Figura 8.17** Andamento costante della velocità indotta e dell'angolo di incidenza indotta dell'ala con distribuzione ellittica della portanza, in condizione di corrente portante ( $\Gamma_0 < 0$ )





per  $|z| \leq b/2$ , per cui anche l'angolo d'incidenza indotta di un'ala con una portanza ellittica è uniforme lungo la sua apertura.

Un caso semplice in cui si ha effettivamente la distribuzione ellittica della portanza si incontra quando l'ala è priva di svergolamento sia geometrico sia aerodinamico. In questo caso le due funzioni  $\alpha(z)$  e  $\alpha_{\ell=0}(z)$  sono costanti e anche  $\alpha_{\text{ind}}$  è costante. Possiamo allora indicare la differenza  $\alpha(z) - \alpha_{\ell=0}(z)$  come variabile  $\alpha$  e l'equazione integrale nel caso di distribuzione ellittica della circolazione si riduce a:

$$\frac{\Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2}}{\pi U c(z)} + \frac{\Gamma_0}{2Ub} = -\alpha.$$

Affinché questa equazione possa essere soddisfatta è necessario che anche la corda abbia una distribuzione ellittica in apertura, ossia deve essere

$$c(z) = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2},$$

dove  $c_0$  è la corda al centro dell'ala. L'equazione assume allora la forma seguente

$$\frac{\Gamma_0}{\pi U c_0} + \frac{\Gamma_0}{2Ub} = -\alpha$$

e definisce quindi il valore della circolazione massima per ogni incidenza. Risolvendo rispetto a  $\Gamma_0$  si ha

$$\Gamma_0(\alpha) = -\frac{4Ub}{2 + R_f} \alpha$$

dove si è introdotto il rapporto di forma dell'ala ellittica, di superficie  $S = \frac{\pi}{4} b c_0$ ,

$$R_f = \frac{b^2}{S} = \frac{b^2}{\frac{\pi}{4} b c_0} = \frac{4}{\pi} \frac{b}{c_0}.$$

Determiniamo ora il coefficiente di portanza:

$$\begin{aligned} C_L &= -\frac{2}{US} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) dz \\ &= -\frac{2\Gamma_0}{US} \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2} dz \\ &= -\frac{2\Gamma_0}{US} \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\pi b \Gamma_0}{2US} \end{aligned}$$





Sostituendo l'espressione  $\Gamma_0(\alpha)$  trovata si ricava

$$C_L(\alpha) = \frac{2\pi R_f}{2 + R_f} \alpha.$$

Infine calcoliamo il coefficiente di resistenza indotta:

$$\begin{aligned} C_{D_{\text{ind}}}(\alpha) &= \frac{2}{US} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz \\ &= \frac{2}{US} \frac{\Gamma_0^2}{2Ub} \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b}\right)^2} dz \\ &= \frac{\Gamma_0^2}{U^2 S b} \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi \Gamma_0^2}{4U^2 S}. \end{aligned}$$

Ma dalla soluzione  $\Gamma_0(\alpha)$  si ha

$$C_{D_{\text{ind}}}(\alpha) = \frac{\pi}{4U^2 S} \left( -\frac{4Ub}{2 + R_f} \alpha \right)^2 = \frac{16\pi U^2 b^2}{4U^2 S (2 + R_f)^2} \alpha^2,$$

ovverosia

$$C_{D_{\text{ind}}}(\alpha) = \frac{4\pi R_f}{(2 + R_f)^2} \alpha^2.$$

Esprimendo l'angolo d'incidenza in funzione del coefficiente di portanza

$$C_{D_{\text{ind}}} = \frac{C_L^2}{\pi R_f}.$$

## 8.9 Distribuzione generica della portanza

### Cambiamento di variabili ed equazione trasformata

Consideriamo ora il caso di un'ala le cui caratteristiche geometriche siano supposte del tutto generali. Ricorriamo ancora allo stesso cambiamento di variabili

$$z = -\frac{b}{2} \cos \theta$$





adottato nel caso di andamento ellittico della portanza e mostrato nella figura 8.16. Introduciamo quindi l'incognita trasformata, ovvero  $\hat{\Gamma}(\theta)$ , funzione della nuova variabile  $\theta$ , definita da

$$\hat{\Gamma}(\theta) = \Gamma(z(\theta)) = \Gamma\left(\cos^{-1}\left(-\frac{2z}{b}\right)\right).$$

Riscriviamo l'equazione integro-differenziale della teoria della linea portante in termini delle nuove variabili introducendo la variabile angolare  $\vartheta$  legata alla variabile d'integrazione  $\zeta$ , mediante lo stesso cambiamento di variabili:

$$\zeta = -\frac{b}{2} \cos \vartheta.$$

Il cambiamento di variabili considerato conduce pertanto all'equazione

$$\frac{\hat{\Gamma}(\theta)}{\pi U \hat{c}(\theta)} + \frac{1}{2\pi Ub} \int_0^\pi \frac{d\hat{\Gamma}(\vartheta)}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta - \cos \theta} = -\hat{\alpha}(\theta) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta),$$

dove sono state introdotte le seguenti funzioni trasformate dei dati

$$\hat{c}(\theta) = c(z(\theta)) = c\left(\cos^{-1}\left(-\frac{2z}{b}\right)\right),$$

$$\hat{\alpha}(\theta) = \alpha(z(\theta)) = \alpha\left(\cos^{-1}\left(-\frac{2z}{b}\right)\right),$$

$$\hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta) = \alpha_{\ell=0}(z(\theta)) = \alpha_{\ell=0}\left(\cos^{-1}\left(-\frac{2z}{b}\right)\right).$$

L'equazione integro-differenziale appena scritta deve essere soddisfatta per ogni  $\theta$  nell'intervallo  $[0, \pi]$  e la sua soluzione  $\hat{\Gamma}(\theta)$  è da determinarsi nello stesso intervallo. Notare che la variabile d'integrazione è indicata dalla lettera greca  $\vartheta$ , che è leggermente diversa dalla normale lettera  $\theta$  utilizzata per rappresentare la variabile *libera* dell'equazione integro-differenziale.

### Rappresentazione in serie di Fourier della soluzione

La soluzione del caso ellittico, cioè  $\hat{\Gamma}^{\text{ell}}(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta$ , unitamente alle condizioni supplementari agli estremi,  $\hat{\Gamma}(0) = 0$  e  $\hat{\Gamma}(\pi) = 0$ , suggeriscono di rappresentare la soluzione del caso generale come una serie di Fourier di soli seni, ovvero sia:

$$\hat{\Gamma}(\theta) = 2Ub \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta),$$





dove il coefficiente  $2Ub$  è stato introdotto in modo da rendere adimensionali i coefficienti della serie  $B_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Il loro valore è determinato imponendo che la serie soddisfi l'equazione di Prandtl della teoria della linea portante. Calcoliamo allora la derivata della funzione  $\hat{\Gamma}(\theta)$  da sostituire poi nell'equazione integro-differenziale. Si ha

$$\frac{d\hat{\Gamma}(\theta)}{d\theta} = 2Ub \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \cos(m\theta).$$

Sostituendo nell'equazione della linea portante si ottiene

$$\frac{2b}{\pi \hat{c}(\theta)} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m B_m \cos(m\vartheta)}{\cos \vartheta - \cos \theta} d\vartheta = -\hat{\alpha}(\theta) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta),$$

ovverosia, scambiando fra loro l'ordine delle operazioni di integrazione e di sommatoria,

$$\begin{aligned} \frac{2b}{\pi \hat{c}(\theta)} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \int_0^{\pi} \frac{\cos(m\vartheta)}{\cos \vartheta - \cos \theta} d\vartheta \\ = -\hat{\alpha}(\theta) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta). \end{aligned}$$

Ma gli integrali definiti sono proprio quelli di Glauert, riportati nel precedente paragrafo e in appendice, per cui l'equazione diventa

$$\frac{2b}{\pi \hat{c}(\theta)} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin \theta} = -\hat{\alpha}(\theta) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta),$$

ovverosia, scrivendo una sola sommatoria,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{2b}{\pi \hat{c}(\theta)} + \frac{m}{\sin \theta} \right] \sin(m\theta) B_m \right\} = -\hat{\alpha}(\theta) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta).$$

Questa equazione deve essere soddisfatta in tutto l'intervallo  $[0, \pi]$  in cui sono definite le tre funzioni  $\hat{c}(\theta)$ ,  $\hat{\alpha}(\theta)$  e  $\hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta)$  che compaiono in essa. Gli infiniti coefficienti  $B_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , sono le incognite del problema. Esse compaiono in modo lineare nell'equazione per cui il problema può essere riguardato come un sistema di **infinite equazioni** lineari, una per ogni valore di  $\theta \in [0, \pi]$ , nelle infinite incognite  $B_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$





### Approssimazione troncata del problema

La risoluzione del problema lineare di “ordine infinito” appena formulato può essere affrontata in modo approssimato troncando la serie della soluzione  $\hat{\Gamma}(\theta)$  a un numero *finito*  $M$  di termini, ovvero scrivendo

$$\hat{\Gamma}(\theta) = 2Ub \sum_{m=1}^M B_m \sin(m\theta),$$

per cui la serie dell’equazione contenente infiniti termini diventa una sommatoria di soli  $M$  termini, ossia,

$$\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \frac{2b}{\pi \hat{c}(\theta)} + \frac{m}{\sin \theta} \right] \sin(m\theta) B_m \right\} = -\hat{\alpha}(\theta) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta).$$

Le  $M$  incognite  $B_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  che compaiono nell’equazione saranno determinate imponendo che essa sia soddisfatta in un insieme discreto di  $M$  valori della variabile  $\theta$  nell’intervallo  $[0, \pi]$ . Tuttavia, la scelta di questi punti non è ovvia poiché le due funzioni  $\frac{1}{\hat{c}(\theta)}$  e  $\frac{m}{\sin \theta}$  che compaiono fra le parentesi quadre possono non essere regolari in tutto l’intervallo  $[0, \pi]$ : infatti la seconda funzione diverge sempre agli estremi mentre la prima funzione può divergere se la lunghezza della corda tende a zero alle estremità alari.

Per evitare le difficoltà che potrebbero essere causate da un’instabilità numerica del problema discreto conviene moltiplicare entrambi i membri dell’equazione per il prodotto  $\hat{c}(\theta) \sin \theta$  e riscrivere l’equazione troncata nella forma seguente

$$\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \frac{2b}{\pi} \sin \theta + m \hat{c}(\theta) \right] \sin(m\theta) B_m \right\} = [-\hat{\alpha}(\theta) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta)] \hat{c}(\theta) \sin \theta.$$

A questo punto possiamo scegliere una distribuzione di punti nella coordinata  $\theta$ . Questa scelta è delicata dal punto di vista numerico poiché una scelta infelice può portare a difficoltà di malcondizionamento. Inoltre la scelta deve escludere gli estremi dell’ala: in questi punti infatti la funzione  $\sin(m\theta)$  si annulla rendendo la relativa equazione singolare. Una buona scelta è quella di prendere punti equispaziati in  $\theta$  che corrispondono ai nodi di quadratura di Gauss–Chebyshev per la coordinata originaria  $z$ , una volta che l’intervallo sia stato normalizzato a  $[-1, 1]$ :  $\theta_m = (2m - 1)\pi/(2M)$ , con  $m = 1, 2, \dots, M$ . A questi punti corrisponde infatti una costante di Lebesgue relativa alla stima dell’errore di interpolazione che cresce solo logicamente con il numero di punti, garantendo in questo modo il buon condizionamento del problema discreto. Imporremo infine che l’equazione sia soddisfatta in ognuno di essi, per cui avremo  $M$  equazioni lineari





$$\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \frac{2b}{\pi} \sin \theta_n + m \hat{c}(\theta_n) \right] \sin(m\theta_n) B_m \right\} = [-\hat{\alpha}(\theta_n) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta_n)] \hat{c}(\theta_n) \sin \theta_n,$$

per  $n = 1, 2, \dots, M$ , nelle  $M$  incognite  $B_m, m = 1, 2, \dots, M$ . Il sistema lineare si scriverà in forma matriciale:

$$Ab = d,$$

dove  $b = (B_1, B_2, \dots, B_M)$  è il vettore delle incognite mentre gli elementi della matrice  $A$  e le componenti del termine noto  $d$  sono dati da

$$A \rightarrow a_{n,m} \equiv \left[ \frac{2b}{\pi} \sin \theta_n + m \hat{c}(\theta_n) \right] \sin(m\theta_n),$$

$$d \rightarrow d_n \equiv [-\hat{\alpha}(\theta_n) + \hat{\alpha}_{\ell=0}(\theta_n)] \hat{c}(\theta_n) \sin \theta_n.$$

Si noti che la matrice del sistema lineare è non simmetrica. Naturalmente, aumentando l'ordine  $M$  del sistema si dovrebbe ottenere una soluzione sempre più accurata dell'equazione integro-differenziale di Prandtl.

### Proprietà aerodinamiche dell'ala

Una volta che la soluzione  $\hat{\Gamma}(\theta)$  è stata trovata, il coefficiente di portanza dell'ala si calcola integrando la distribuzione della portanza per unità di apertura su tutta l'ala e adimensionalizzando il risultato nel modo consueto. Si ottiene così la relazione

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} = \frac{2}{\rho U^2 S} \int_{-b/2}^{b/2} \ell(z) dz \\ &= \frac{2}{\rho U^2 S} \left[ -\rho U \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) dz \right] \\ &= -\frac{2}{US} \frac{b}{2} \int_0^\pi \hat{\Gamma}(\theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Sostituendo l'espansione in serie della soluzione  $\hat{\Gamma}(\theta)$  si ottiene

$$\begin{aligned} C_L &= -\frac{b}{US} \int_0^\pi 2Ub \sum_{m=1}^\infty B_m \sin(m\theta) \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{2b^2}{S} \sum_{m=1}^\infty B_m \int_0^\pi \sin(m\theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$





Ma per la nota relazione di ortogonalità

$$\int_0^\pi \sin(m\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,1},$$

tutti i termini della sommatoria sono nulli tranne il primo e quindi risulta

$$C_L = -\frac{\pi b^2}{S} B_1.$$

Ricordando il rapporto di forma  $R_f = b^2/S$ , il coefficiente di portanza dell'ala si può scrivere anche come

$$C_L = -\pi R_f B_1.$$

Notiamo che, benché  $C_L$  dipenda solo dal primo coefficiente della serie di  $\hat{\Gamma}(\theta)$ , un valore accurato di  $C_L$  richiede di risolvere un sistema lineare con un numero  $M$  sufficientemente grande di incognite,  $B_m, m = 1, 2, \dots, M$ .

Il calcolo del coefficiente di resistenza indotta è alquanto più elaborato dal punto di vista dei passaggi analitici, seppur concettualmente analogo al precedente. Per definizione abbiamo:

$$\begin{aligned} C_{D_{\text{ind}}} &= \frac{D_{\text{ind}}}{\frac{1}{2}\bar{\rho}U^2S} = \frac{2}{\bar{\rho}U^2S} \int_{-b/2}^{b/2} \ell_x(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz \\ &= \frac{2}{\bar{\rho}U^2S} \left[ \bar{\rho}U \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz \right] \\ &= \frac{b}{US} \int_0^\pi \hat{\Gamma}(\theta) \hat{\alpha}_{\text{ind}}(\theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Il calcolo dell'integrale richiede di sostituire la serie della soluzione  $\hat{\Gamma}(\theta)$  come pure l'espressione corrispondente della funzione  $\hat{\alpha}_{\text{ind}}(\theta)$ . Quest'ultima, utilizzando il consueto cambiamento di variabili, è definita da

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\text{ind}}(\theta) &= \frac{1}{4\pi U} \frac{2}{b} \int_0^\pi \frac{d\hat{\Gamma}(\vartheta)}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta - \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2\pi Ub} \int_0^\pi \frac{2Ub \sum_{m=1}^\infty m B_m \cos(m\vartheta)}{\cos \vartheta - \cos \theta} d\vartheta \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^\infty m B_m \int_0^\pi \frac{\cos(m\vartheta) d\vartheta}{\cos \vartheta - \cos \theta}. \end{aligned}$$





Ricorrendo alla formula dell'integrale di Glauert contenente il coseno si ottiene infine

$$\hat{\alpha}_{\text{ind}}(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin \theta}.$$

Sostituendo le due serie nell'espressione di  $C_{D_{\text{ind}}}$  si ha

$$\begin{aligned} C_{D_{\text{ind}}} &= \frac{b}{US} \int_0^{\pi} \left[ 2Ub \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta) \right] \left[ \sum_{m'=1}^{\infty} m' B_{m'} \sin(m'\theta) \right] d\theta \\ &= \frac{2b^2}{S} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} B_m m' B_{m'} \int_0^{\pi} \sin(m\theta) \sin(m'\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ricorriamo ora alla relazione di ortogonalità

$$\int_0^{\pi} \sin(m\theta) \sin(m'\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,m'},$$

per cui le due sommatorie si riducono a una sola:

$$C_{D_{\text{ind}}} = \frac{\pi b^2}{S} \sum_{m=1}^{\infty} m B_m^2.$$

Introducendo il rapporto di forma dell'ala,  $R_f = b^2/S$ , abbiamo

$$C_{D_{\text{ind}}} = \pi R_f \sum_{m=1}^{\infty} m B_m^2.$$

Questo risultato si scrive anche in una forma leggermente diversa separando il contributo del primo termine della serie da tutti i successivi

$$C_{D_{\text{ind}}} = \pi R_f B_1^2 \left( 1 + \sum_{m=2}^{\infty} m \frac{B_m^2}{B_1^2} \right),$$

e introducendo poi il parametro adimensionale

$$\delta = \sum_{m=2}^{\infty} m \left( \frac{B_m}{B_1} \right)^2,$$





per cui si ha

$$C_{D_{\text{ind}}} = \pi(1 + \delta) R_f B_1^2,$$

ovvero, in funzione del coefficiente di portanza,

$$C_{D_{\text{ind}}} = (1 + \delta) \frac{C_L^2}{\pi R_f}.$$

Dalle formule precedenti, poiché in esse compaiono termini intrinsecamente positivi, si deduce facilmente che la forza appena calcolata è effettivamente una resistenza, cioè ha verso concorde con quello della velocità del flusso che investe l'ala e pertanto si oppone al moto dell'ala.

Può apparire strano, in prima istanza, il fatto che utilizzando un modello di fluido non dissipativo, non viscoso, nasca una forza che si oppone al moto. Dal punto di vista energetico questo fenomeno può essere spiegato con la necessità, da parte dell'ala, di mettere in movimento una quantità sempre maggiore di fluido, che va a costituire la scia di Prandtl. In altre parole, la resistenza indotta può essere spiegata con il fatto che, a partire dal momento dell'avviamento, la scia continua ad allungarsi e a essa viene trasferita dall'ala un'energia. L'ala si trova perciò a dover compiere un lavoro durante il suo moto il che implica la presenza di una resistenza.

Determiniamo infine i coefficienti del momento di rollio e di imbardata. Essi si ottengono calcolando rispettivamente il momento delle forze di portanza rispetto all'asse  $x$  e il momento delle forze di resistenza indotta rispetto all'asse  $y$  e adimensionalizzando opportunamente. Effettuando il cambiamento di variabili nell'espressione del coefficiente di rollio si ottiene

$$\begin{aligned} C_{\text{mom, rollio}} &= -\frac{2}{USb} \int_{-b/2}^{b/2} z \Gamma(z) dz \\ &= \frac{b}{2US} \int_0^\pi \hat{\Gamma}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{b}{4US} \int_0^\pi \hat{\Gamma}(\theta) \sin(2\theta) d\theta \\ &= \frac{b}{4US} \int_0^\pi 2UB \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta) \sin(2\theta) d\theta \\ &= \frac{b^2}{2S} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^\pi \sin(m\theta) \sin(2\theta) d\theta. \end{aligned}$$





Per l'ortogonalità dei coseni, il calcolo degli integrali è immediato e quindi abbiamo

$$C_{\text{mom, rollio}} = \frac{R_f}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\pi}{2} \delta_{m,2},$$

da cui otteniamo il risultato

$$C_{\text{mom, rollio}} = \frac{\pi}{4} R_f B_2.$$

Come era lecito attendersi, il momento di rollio è legato ai termini *pari* della serie di seni, quelli che corrispondono alle distribuzioni di circolazione, e quindi di portanza, antisimmetriche rispetto alla mezzeria alare. Un po' più sorprendente è che, come nel caso del coefficiente di portanza, il coefficiente di momento di rollio dipenda solamente dal primo termine pari della serie.

Riguardo il coefficiente del momento di imbardata abbiamo

$$\begin{aligned} C_{\text{mom, imb}} &= \frac{2}{USb} \int_{-b/2}^{b/2} z \Gamma(z) \alpha_{\text{ind}}(z) dz \\ &= -\frac{b}{2US} \int_0^{\pi} \hat{\Gamma}(\theta) \hat{\alpha}_{\text{ind}}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni della soluzione  $\hat{\Gamma}(\theta)$  e dell'incidenza indotta  $\hat{\alpha}_{\text{ind}}(\theta)$  si ha

$$\begin{aligned} C_{\text{mom, imb}} &= -\frac{b^2}{S} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta) \sum_{m'=1}^{\infty} m' B_{m'} \frac{\sin(m'\theta)}{\sin \theta} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= -R_f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} B_m m' B_{m'} \int_0^{\pi} \sin(m\theta) \sin(m'\theta) \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

L'integrale si calcola ricordando la relazione trigonometrica di

$$\sin(n\theta) \cos \theta = \frac{1}{2} \{ \sin[(n+1)\theta] + \sin[(n-1)\theta] \},$$





per cui

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \sin(m\theta) \sin(m'\theta) \cos \theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(m\theta) \{ \sin[(m' + 1)\theta] + \sin[(m' - 1)\theta] \} \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\pi \sin(m\theta) \sin[(m' + 1)\theta] \, d\theta + \int_0^\pi \sin(m\theta) \sin[(m' - 1)\theta] \, d\theta \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} \delta_{m,m'+1} + \frac{\pi}{2} \delta_{m,m'-1} \right\} = \frac{\pi}{4} \{ \delta_{m,m'+1} + \delta_{m,m'-1} \}.
 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 C_{\text{mom, imb}} &= -\frac{\pi}{4} R_f \sum_{m=1}^{\infty} [B_{m+1} m B_m + B_{m-1} m B_m] \\
 &= -\frac{\pi}{4} R_f \sum_{m=1}^{\infty} m B_m [B_{m+1} + B_{m-1}],
 \end{aligned}$$

dove naturalmente  $B_0 = 0$ , per definizione. Da questa è immediato ricavare

$$C_{\text{mom, imb}} = -\frac{\pi}{4} R_f \sum_{m=1}^{\infty} (2m + 1) B_m B_{m+1}.$$

Come si vede da questa precedente, i termini che contribuiscono a produrre il momento di imbardata sono il prodotto di coefficienti consecutivi della serie, ossia prodotto di due coefficienti di cui uno relativo a una distribuzione di circolazione simmetrica e uno relativo a una distribuzione di circolazione antisimmetrica. Questo vuole dire che, affinché vi sia momento di imbardata, la distribuzione di circolazione non deve essere né una funzione simmetrica, né una funzione antisimmetrica. Questo è il caso ad esempio di una manovra di alettoni, nella quale a una distribuzione simmetrica di portanza necessaria al sostentamento del velivolo, si sovrappone una distribuzione non simmetrica dovuta all'azionamento delle superfici di governo.





**Tabella 1.** Soluzione dell'equazione integro-differenziale della teoria della linea portante di Prandtl–Lanchester:  $\theta = \theta(z) = \cos^{-1}(-\frac{2z}{b})$ .

	ala di pianta ellittica	ala di pianta arbitraria
$\Gamma(z)$	$\Gamma_0(\alpha)\sqrt{1 - (\frac{2z}{b})^2}$	$2Ub \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin[m\theta(z)]$
$\ell(z)$	$-\bar{\rho}U\Gamma_0(\alpha)\sqrt{1 - (\frac{2z}{b})^2}$	$-2\bar{\rho}U^2b \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin[m\theta(z)]$
$v_{ind}(z)$	$\frac{\Gamma_0(\alpha)}{2b}$	$U \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \frac{\sin[m\theta(z)]}{\sin\theta(z)}$
$\alpha_{ind}(z)$	$\frac{\Gamma_0(\alpha)}{2Ub} = -\frac{C_L}{\pi R_f}$	$\sum_{m=1}^{\infty} m B_m \frac{\sin[m\theta(z)]}{\sin\theta(z)}$
$L$	$-\frac{\pi}{4} \bar{\rho}Ub\Gamma_0(\alpha)$	$-\frac{\pi}{2} \bar{\rho}U^2b^2 B_1$
$C_L$	$-\frac{\pi}{2} \frac{b\Gamma_0(\alpha)}{US} = \frac{2\pi R_f}{2+R_f} \alpha$	$-\pi R_f B_1$
$C_{D_{ind}}$	$\frac{4\pi R_f}{(2+R_f)^2} \alpha^2 = \frac{C_L^2}{\pi R_f}$	$\pi (1 + \delta) R_f B_1^2 = (1 + \delta) \frac{C_L^2}{\pi R_f}$
$C_{mom, rollio}$	0	$\frac{\pi}{4} R_f B_2$
$C_{mom, imb}$	0	$-\frac{\pi}{4} R_f \sum_{m=1}^{\infty} (2m + 1) B_m B_{m+1}$
	$\Gamma_0(\alpha) \equiv -\frac{4Ub}{2+R_f} \alpha$	$\delta \equiv \sum_{m=2}^{\infty} m \left(\frac{B_m}{B_1}\right)^2$

## 8.10 Ruolo del rapporto di forma

La tabella sintetica precedente permette di analizzare ora il ruolo giocato da rapporto di forma, o allungamento, nel comportamento dell'ala di allungamento finito. Al fine di semplificare il ragionamento possiamo ragionare a partire dal comportamento di un'ala ellittica, i cui risultati possono essere poi generalizzati per un'ala qualunque.

Innanzitutto analizziamo la relazione che lega il coefficiente di portanza dell'ala e l'angolo di incidenza. La relazione riportata in tabella mostra che, per  $R_f \rightarrow \infty$ , la





pendenza della curva  $C_L-\alpha$  tende a  $2\pi$ , pendenza caratteristica di un profilo sottile bidimensionale. Per valori finiti dell'allungamento, la pendenza risulta inferiore a quella del caso bidimensionale e diminuisce al diminuire dell'allungamento.

